www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DURÉE : 4 heures

PRÉAMBULE

On appelle matrice de Jacobi une matrice réelle J à N lignes et N colonnes, satisfaisant les conditions :

$$N > 1$$
$$J_{i,i} = b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N$$
$$J_{i,i+1} = J_{i+1,i} = a_i > 0, \quad 1 \leqslant i < N$$
$$J_{i,j} = 0 \text{ si } |j - i| > 1$$

où $J_{i,j}$ désigne le terme en i-ième ligne et j-ième colonne de J.

On note I_n la matrice identité à n lignes et n colonnes.

PREMIÈRE PARTIE

1. Quelle relation de récurrence satisfont les déterminants
$$F_n(X) = \det(XI_n - J_n)$$
où J_n est la matrice obtenue en prenant les n premières lignes et les n premières colonnes de J ?

2. Démontrer que F_n a n racines réelles $x_{i,n}$ distinctes entre lesquelles s'intercalent les racines de F_{n-1} c'est-à-dire :
$$x_{i,n} < x_{i,n-1} < x_{i+1,n} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i < n$$
si l'on range les racines de F_n et F_{n-1} par ordre croissant.

3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $D = P^{-1}JP$ soit une matrice diagonale réelle. On note $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ les coefficients diagonaux de D, et $p_{i,j}$ les coefficients de P.

4. Soit μ un réel différent de tous les μ_i. Calculer le cofacteur du terme en colonne 1 et ligne N de $\mu I_N - J$ et le terme en ligne 1 et colonne N de $(\mu I_N - J)^{-1}$.

5. Démontrer l'égalité :
$$\frac{\prod_{j=1}^{j=N-1} a_j}{\prod_{i=1}^{i=N} (\mu - \mu_i)} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{p_{1,i}\, p_{N,i}}{\mu - \mu_i}.$$

6. Retrouver que J a N valeurs propres distinctes et montrer que les première et dernière lignes de P ne contiennent aucun coefficient nul.

7. Démontrer les égalités :

a.
$$b_j = \sum_{k=1}^{k=N} p_{j,k}^2\, \mu_k \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant N$$

b.
$$\begin{cases} a_j^2 = \sum_{k=1}^{k=N} (\mu_k p_{j,k} - b_j p_{j,k} - a_{j-1} p_{j-1,k})^2 \text{ pour } 1 < j < N. \\ a_1^2 = \sum_{k=1}^{k=N} (\mu_k p_{1,k} - b_1 p_{1,k})^2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} a_{j-1} p_{j-1,k} + b_j p_{j,k} + a_j p_{j+1,k} = \mu_k p_{j,k} \text{ pour } 1 < j < N \\ b_1 p_{1,k} + a_1 p_{2,k} = \mu_k p_{1,k} \\ a_{N-1} p_{N-1,k} + b_N p_{N,k} = \mu_k p_{N,k} \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

DEUXIÈME PARTIE

On se donne une matrice diagonale D à N lignes et N colonnes et une matrice ligne L à N termes vérifiant les conditions :

$$(*)\begin{cases}\text{les termes diagonaux de D sont tous distincts}\\ \text{les termes de L sont tous non nuls}\\ \text{la somme des carrés des termes de L vaut 1}\end{cases}$$

1. On se pose le problème de reconstruire une matrice de Jacobi J (avec les a_i tous > 0) et une matrice P telles que les égalités de la question I.8. soient vérifiées et que L soit la première ligne de P.

   a. Expliciter comment les relations de la question I.8 déterminent b_1 , puis a_1 . Vérifier que a_1 n'est pas nul. Déterminer $p_{2,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.

   b. On suppose déterminés les réels b_i, $1 \leqslant i \leqslant l-1$ et a_i, $1 \leqslant i \leqslant l-1$ avec $\prod_{i=1}^{l-1} a_i \neq 0$ et les $p_{i,k}$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$ et $1 \leqslant k \leqslant N$. Montrer que b_l satisfait

$$(J_l - \mu_k I_l)\begin{bmatrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{l-1,k} \\ p_{l,k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{l-1}p_{l-1,k} + (b_l - \mu_k)p_{l,k}\end{bmatrix}.$$

   c. En déduire que $\sum_{k=1}^{k=N} (\mu_k p_{l,k} - b_l p_{l,k} - a_{l-1}\, p_{l-1,k})^2$ n'est pas nul pour $1 < l < N$.

   d. Achever par récurrence sur l la reconstruction de la matrice de Jacobi.

2. Montrer que la matrice P ainsi obtenue est orthogonale.

3. Reconstituer J et P à partir de $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 6$, $p_{1,1} = \frac{1}{3}$, $p_{1,2} = \frac{2}{3}$ et $p_{1,3} = \frac{2}{3}$.

4. Montrer que si tous les b_i sont nuls, le polynôme F_N est pair ou impair selon la parité de N.

5. Montrer que si le polynôme pair ou impair F de degré N a N racines réelles distinctes, il existe une matrice de Jacobi J dont la diagonale est nulle, dont les coefficients a_i, $1 \leqslant i < N$ sont strictement positifs et dont les N valeurs propres sont les racines de F.

6. Écrire une procédure en langage Pascal qui, à partir des deux arguments d'entrée *nu* et *p*1 de type array [1..N] vérifiant les conditions (*) retourne les deux arguments de sortie *ja* et *p* de type array [1..N, 1..N] (les vérifications ne devant pas faire partie de cette procédure).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail